

**INSTITUTO TECNOLOGICO DE COSTA RICA**  
**ESCUELA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

**LABORATORIO DE CONTROL AUTOMÁTICO**

**SISTEMA DE LEVITACION PARA MEDIOS DE TRANSPORTE  
MAGNETICOS**

Aarón Caballero Valerín  
200221036 Grupo 2

Jhonny Gómez Jiménez  
200113678 Grupo 1

Wilberth Real Durán  
200405353 Grupo 1

**Profesor:** Ing. Eduardo Interiano S.

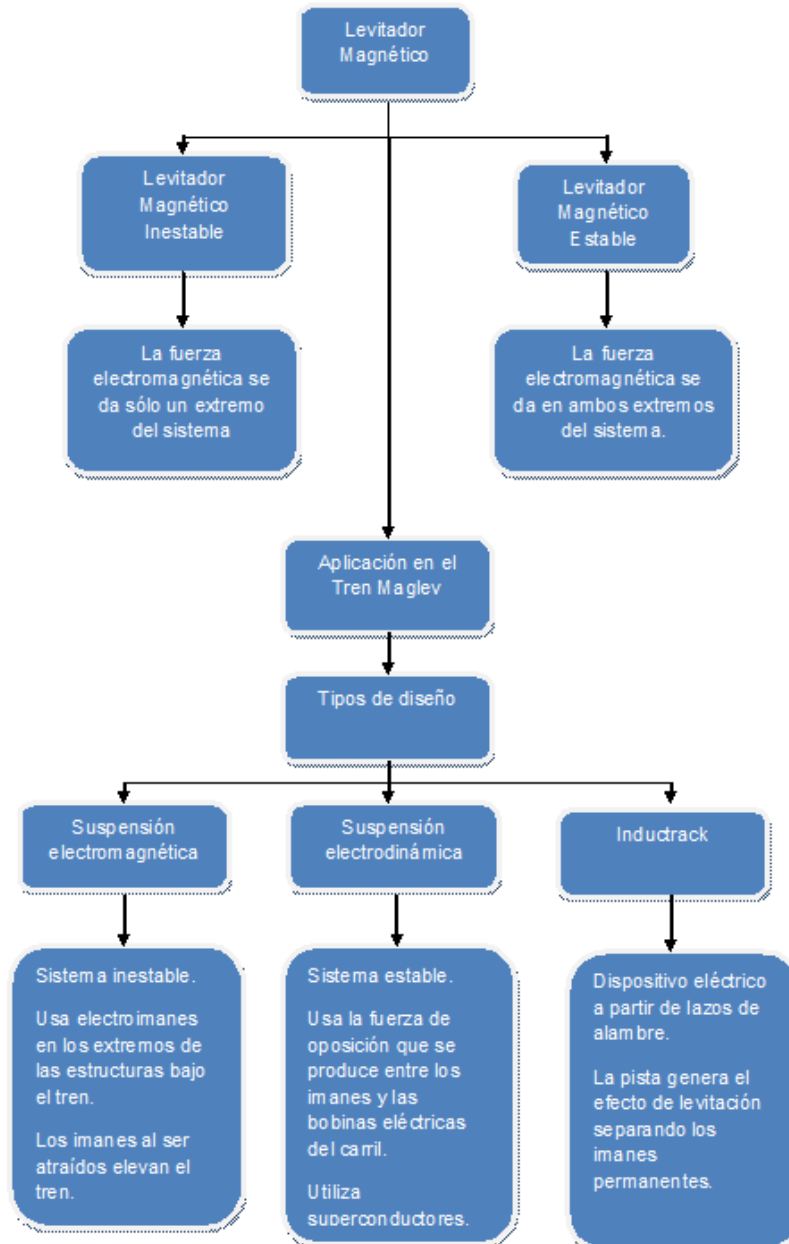
II Semestre, 2010

## Contenido

1. Introducción.....	3
2. Definición del proyecto.....	4
3. Objetivos.....	6
3.1 Objetivo General .....	6
3.2 Objetivos Específicos.....	6
4. Modelado del sistema .....	7
5. Diseño del sistema.....	14
6. Resultados Experimentales.....	22
7. Análisis de Resultados .....	23
8. Conclusiones.....	25
9. Recomendaciones .....	26
10. Bibliografía.....	27
11. Anexo.....	28

## 1. Introducción

La levitación magnética o suspensión magnética, es un método por el cual un objeto está suspendido en el aire por la utilización únicamente de campos magnéticos, es decir, no intervienen elementos adicionales para mantener el objeto suspendido en el aire.



**Figura 1.** Tipos de levitadores magnéticos

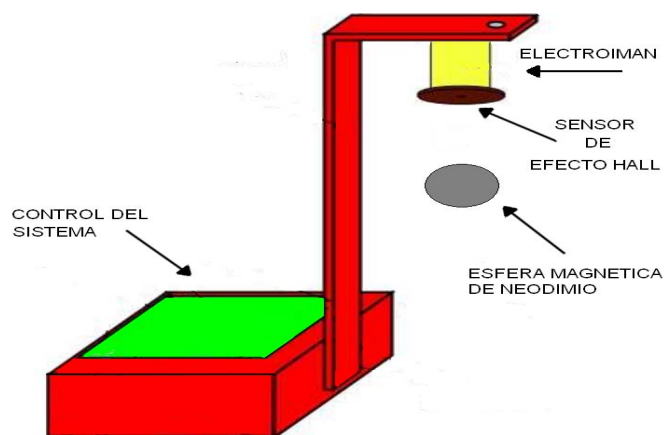
## 2. Definición del proyecto

Una de las aplicaciones de la levitación magnética es el transporte de cargas donde se utiliza la sustentación e impulso por este medio. En el presente laboratorio se implementará la suspensión magnética inestable, en la cual se simulará una grúa que se utiliza en el remolque de contenedores mediante una esfera de metal suspendida a una altura constante en el aire mediante la levitación magnética.

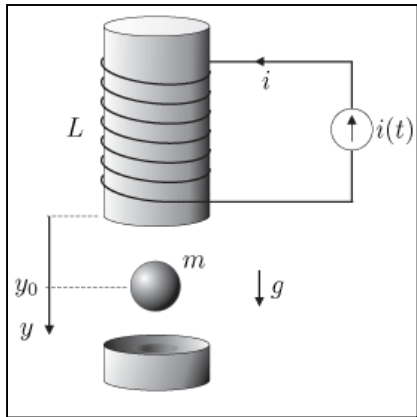
El sistema de levitación magnética utiliza imanes, sensores de efecto Hall, los cuales miden la tensión transversal en un conductor cuando es puesto en un campo magnético, y de un control para regular las fuerzas electromagnéticas situadas en el diseño.

Adicionalmente se necesitará un modelo matemático, el cual se encuentra dividido en dos partes:

- Modelado físico: Donde intervienen la fuerza magnetomotriz, la fuerza de gravedad y la masa de la esfera de metal.
- Modelado eléctrico: Donde intervienen variables como la tensión del efecto Hall y la corriente en la bobina.



**Figura 2.** Diagrama del sistema a implementar



**Figura 3.** Diagrama del sistema a implementar con sus diferentes variables.

### **3. Objetivos**

#### **3.1 Objetivo General**

Implementar un sistema, el cual permita mantener suspendida una esfera de Neodymium a un nivel a un nivel constante.

#### **3.2 Objetivos Específicos**

**3.2.1** Construir la planta que se adecue mejor a las necesidades de nuestro problema.

**3.2.2** Realizar el modelado empírico y analítico de la planta a controlar.

**3.2.3** Diseñar el control de la planta.

## 4. Modelado del sistema

### 4.1 Diagrama de bloques

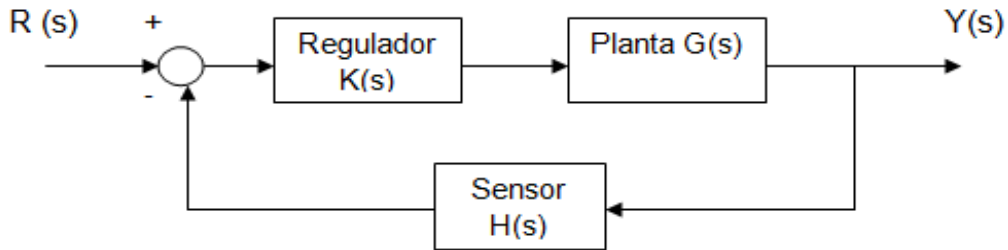


Figura 4. Diagrama de bloques del sistema de levitación magnética

La figura 3 muestra el diagrama de bloques del sistema, donde la retroalimentación se da con la diferencia de una tensión de referencia con la tensión proveniente del sensor  $H(s)$ , la cual está dada por la posición vertical de la esfera, posteriormente con el controlador  $K(s)$ , se obtiene la corriente necesaria para alimentar la bobina de la planta y así lograr la levitación en una posición fija de la esfera metálica.

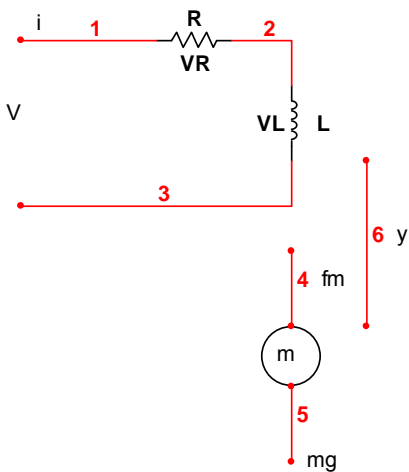
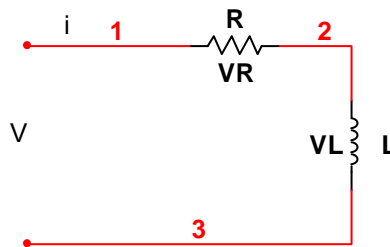


Figura 5. Modelado del sistema de levitación.

En la figura 5 se muestra el circuito del sistema, donde cada variable se denota así:

- v = Tensión de entrada.
- i = Corriente del bobinado.
- R = Resistencia del bobinado.
- L = Inductancia del bobinado.
- c = Tensión de Efecto Hall (Sensor).
- $f_M$  = Fuerza de levitación.
- g = Aceleración gravitacional.
- m = Masa de la esfera.
- y = Posición de la esfera.

#### 4.2 Modelado Eléctrico



**Figura 6.** Modelado eléctrico del sistema

El circuito del modelado eléctrico se basa en un circuito RL, del cual se obtiene una expresión para la corriente que circula a través de la bobina.

$$v = v_R + v_L$$

$$v_L = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$v = iR + L \frac{di(t)}{dt}$$

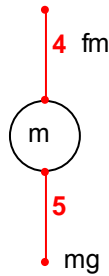
$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{v}{L} - \frac{R}{L} i(t)$$

$$v = iR + L \frac{di(t)}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{v}{L} - \frac{R}{L} i(t) \quad (2)$$



### 4.3 Modelado Físico



**Figura 7.** Modelado físico del sistema

Para determinar una ecuación para la posición de la esfera, se aplica la Segunda Ley de Newton, la cual, a partir de la fuerza magnetomotriz y de la fuerza de la gravedad se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden para la posición de la esfera en el sistema.

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = mg - f_M$$

$$f_M = k \frac{i(t)}{y^4}$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = mg - k \frac{i(t)}{y^4} \quad (3)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = g - \frac{k}{my^4} i(t) \quad (4)$$

#### 4.4 Ecuaciones y variables de estado

Se definen las siguientes variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= y(t) & \dot{x}_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{dy(t)}{dt} & \dot{x}_2 &= g - \frac{k}{my^4}i(t) \\ x_3 &= i(t) & \dot{x}_3 &= \frac{v}{L} - \frac{R}{L}i(t) \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene las ecuaciones de estado:

$$\Delta\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4gmy_0^4 & 0 & \frac{-k}{my_0^4} \\ 0 & 0 & -160 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 66,667 \end{pmatrix} \Delta v$$

$$\Delta y = [1 \quad 0 \quad 0] \Delta x$$

De donde se obtiene que  $f_2(t)$  es una ecuación no lineal, lo que nos lleva a que el sistema se linealiza en el punto de equilibrio:

$$y(t) = x_1 = cte \Rightarrow x_2 = \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0$$

De aquí, despejando en la función  $f_2(t)$  se obtiene:

$$0 = g - \frac{k}{m} \frac{x_3}{x_1^4} \Rightarrow g = \frac{k}{m} \frac{x_3}{x_1^4}$$

$$x_3 = \frac{mg}{k} x_1^4$$

El punto de equilibrio a trabajar es:

$$\begin{aligned} x_1 &= cte \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \frac{mg}{k} x_1^4 \end{aligned} \quad (5)$$

Las ecuaciones de estado linealizadas y las ecuaciones de salida se muestran a continuación:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_3} \\ \frac{df_3}{dx_1} & \frac{df_3}{dx_2} & \frac{df_3}{dx_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{4kx_3}{mx_1^3} & 0 & \frac{-k}{mx_1^4} \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L} \end{pmatrix}$$

$$\Delta\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{4kx_3}{mx_1^3} & 0 & \frac{-k}{mx_1^4} \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \Delta v$$

$$\Delta y = [1 \ 0 \ 0] \Delta x$$

Evaluando el punto de equilibrio (5):

$$\Delta\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4gmy_0^4 & 0 & \frac{-k}{my_0^4} \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \Delta v$$

$$\Delta y = [1 \ 0 \ 0] \Delta x$$

Utilizando los valores de la resistencia e inductancia de la planta se obtiene:

$$\Delta\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1,96 \times 10^3 & 0 & -35,8214 \\ 0 & 0 & -160,3460 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 66,6 \end{pmatrix} \Delta v$$

$$\Delta y = [1 \ 0 \ 0] \Delta x$$

Con:

$$R = 2.41 \Omega$$

$$L = 15.03 \text{mH.}$$

$$m = 3.02 \text{g.}$$

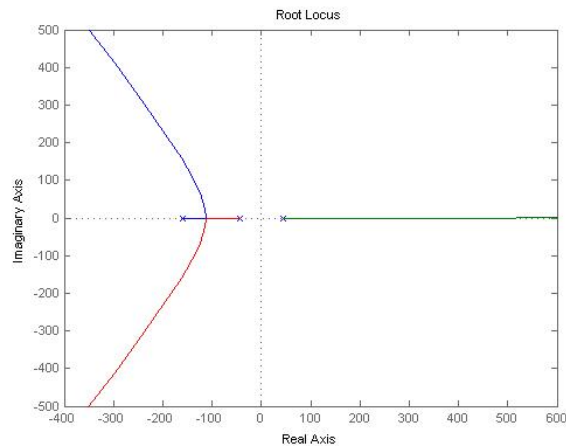
$$g = 9.81 \text{m/s}^2.$$

x1= 20mm.

Luego de obtener la ecuación con los parámetros de la planta obtenemos como función de transferencia en función del desplazamiento:

$$H(s) = \frac{-2,38 \times 10^3}{s^3 + 160,346s^2 - 1962s - 314599} \quad (6)$$

Y a partir de la función de transferencia encontrada, se obtiene el lugar de las raíces, el cual se muestra en la figura 8, en el que se puede observar que el sistema es inestable debido a que un polo se encuentra en el semiplano derecho.

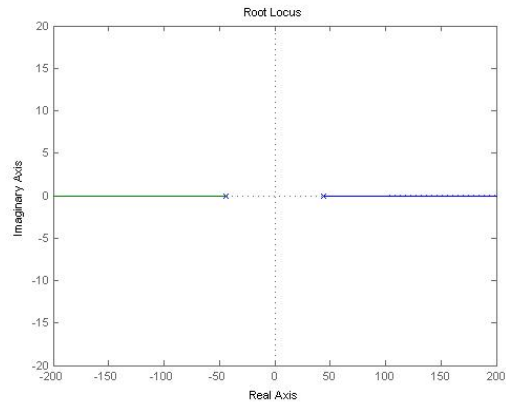


**Figura 8.** Lugar de las raíces para la función de transferencia en función del desplazamiento.

Posteriormente se encontró la función de transferencia del sistema con respecto a la corriente, la cual está dada por:

$$H(s) = \frac{-35,8237}{s^2 - 1962} \quad (7)$$

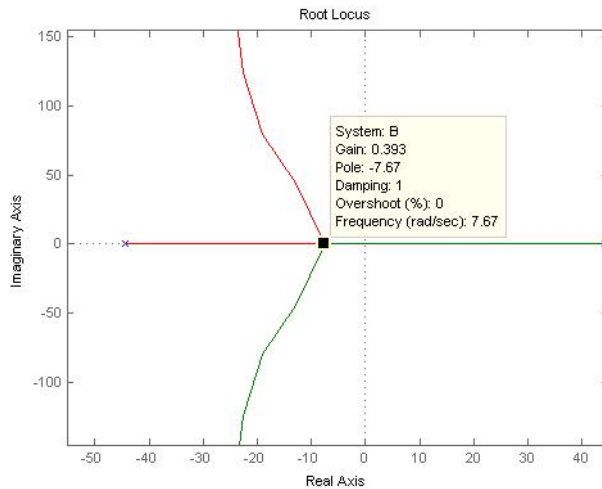
El lugar de las raíces de dicho sistema está representado en la figura 9.



**Figura 9.** Lugar de las raíces para la función de transferencia en función de la corriente.

Para poder controlar el sistema y a la vez que sea un sistema estable a lazo cerrado, se estableció un control con un valor de:

$K_c = 256.48 \frac{(s+66.36)}{(s+119.064)}$ , con el que se obtuvo la gráfica del lugar de las raíces que se muestra en la figura 10.



**Figura 10.** Lugar de las raíces para la función añadiendo el control  $K_c$ .

## 5. Diseño del sistema

La implementación del diseño de un sistema se da porque estamos trabajando con un sistema inestable referido a las secciones anteriores, como se observa en el lugar de las raíces figura 8, tenemos un polo en el semiplano positivo del eje de coordenadas de los números reales por ello se optó a realizar un circuito que realice el desplazamiento hacia la izquierda de este polo para así obtener un sistema estable.

En esta sección se realizara la descripción de las diferentes etapas del diseño del circuito para realizar que el sistema sea estable como se muestra en la figura 11, así es como estará compuesto nuestro diseño del sistema.

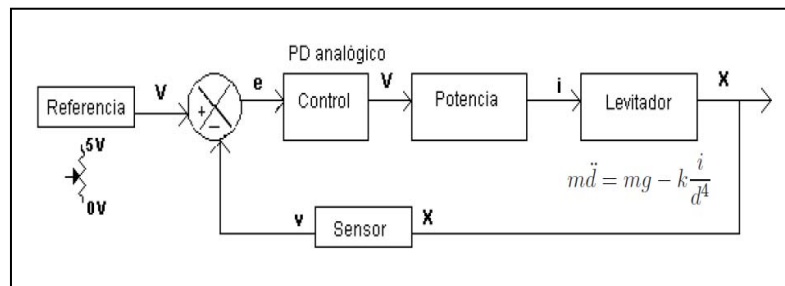


Figura 11. Diagrama de bloques para el diseño del sistema.

### 5.1 Sensor

El sensor que se utilizó es de efecto de hall lineal, radiométrico, su característica principal es que cuando un objeto ferromagnético se aproxima al sensor, en nuestro caso la esfera magnética, el campo que provoca el imán en el elemento se debilita, por lo que determinar la longitud que hay entre el sensor y del objeto ferromagnético.

El sensor se colocó en la parte inferior de la bobina para así obtener la distancia que está la esfera del sensor por que éste puede detectar con precisión los cambios en la densidad de flujo magnético, con una precisión que hasta detecta cambios muy débiles. Si se acerca la esfera al sensor la tensión de salida va aumentando linealmente con respecto a la distancia. Algo que hay que tomar

en cuenta es que si el sensor no detecta ningún objeto el tendrá a la salida la mitad de la tensión de alimentación.

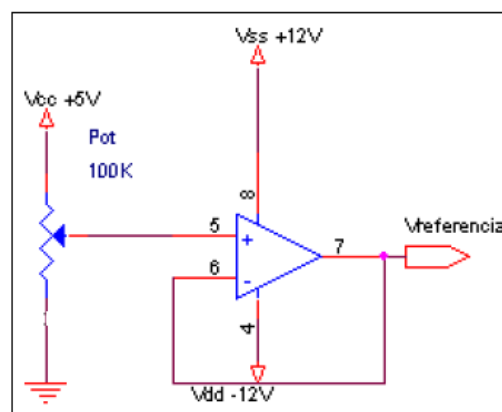
En la tabla 1 se muestra el comportamiento del sensor cuando se aleja o se acerca un material ferromagnético en nuestro caso es la esfera.

**Tabla 1.** Comportamiento del sensor ante un material ferromagnético.

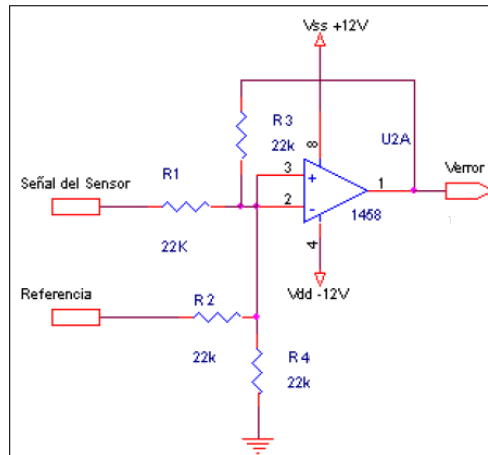
Tensión de salida (V)	Distancia (cm)
4.87	0
4.50	0.5
3.71	1
2.9	1.5
2.73	2
2.6	2.5
2.55	3
2.53	3.5
2.51	4
2.5	4.5

## 5.2 Diferenciador

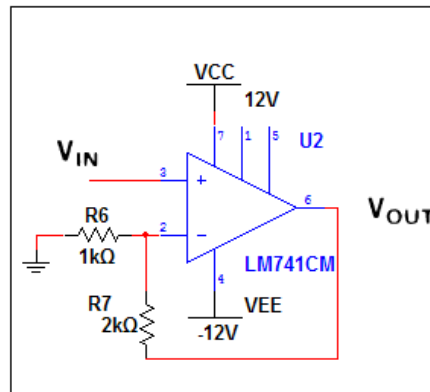
El diferenciador lo que realiza es que tiene a sus entradas la tensión de referencia y la tensión que el sensor. En este caso se utilizó varios amplificadores en configuración de seguidor figura 12, restador figura 13 y no inversor figura 14.



**Figura 12.** Amplificador seguidor



**Figura 13.** Amplificador restador



**Figura 14.** Amplificador no inversor.

### 5.3 Control PD

Para la implementación del control PD se debe tomar en cuenta que se debe escoger el tiempo de estabilización mayor al tiempo de carga de la bobina esto es que el tiempo de estabilización que se utilizó para esta planta es de 50 ms con un amortiguamiento relativo del 0.9 %.

Por medio de los datos del tiempo de estabilización y el amortiguamiento relativo se pueden obtener los resultados del sobre impulso máximo que es de 0.152% y de la frecuencia natural no amortiguada de 88.89 rad/s estos resultados se obtuvieron por medio de las ecuaciones 8 y 9.



$$M = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (8)$$

$$t_s = \frac{4}{\xi*\omega} \quad (9)$$

Ahora con estos valores obtenidos de la frecuencia natural, el sobreimpulso máximo y la función de transferencia la cual es la ecuación 7 se puede obtener los resultados del control PD.

Polos complejos:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega \mp j\omega\sqrt{1-\zeta^2} \quad (10)$$

$$s_{1,2} = -80 \mp j38.7458 \quad (11)$$

Regulador:

$$K(s) = Kc \frac{s-z_0}{s-p_0} \quad (12)$$

Aplicando el método la bisectriz se obtiene el compensador

$$\theta = 180 - \arg(s_{1,2}) \quad (13)$$

$$\phi = 180^\circ - \arg(G(s_{1,2})) \quad (14)$$

$$z_0 = -|s_{1,2}| * \frac{\cos\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)} \quad (15)$$

$$p_0 = -|s_{1,2}| * \frac{\cos\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right)} \quad (16)$$

$$K_c = \left| \frac{1}{G(s) * \hat{K}(s)} \right|_{s = s_{1,2}} \quad (17)$$

El cálculo de los datos se realizó mediante las ecuaciones y sus respectivos resultados se muestran en la tabla 2.

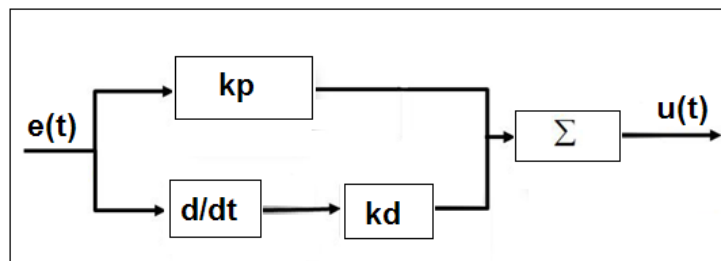
**Tabla 2.** Parámetros del compensador.

Datos	Valor
$\Theta$	25.84°
$\Phi$	64.63°
z0	-66.36
p0	-119.064

El compensador que se obtiene por medio de los cálculos es el siguiente:

$$K(s) = 256.52 * \frac{(s + 66.36)}{(s + 119.064)}$$

Ahora que ya tenemos el compensador podemos realizar la implementación del circuito PD.



**Figura 15.** Diagrama de bloques del compensador PD.

Donde:

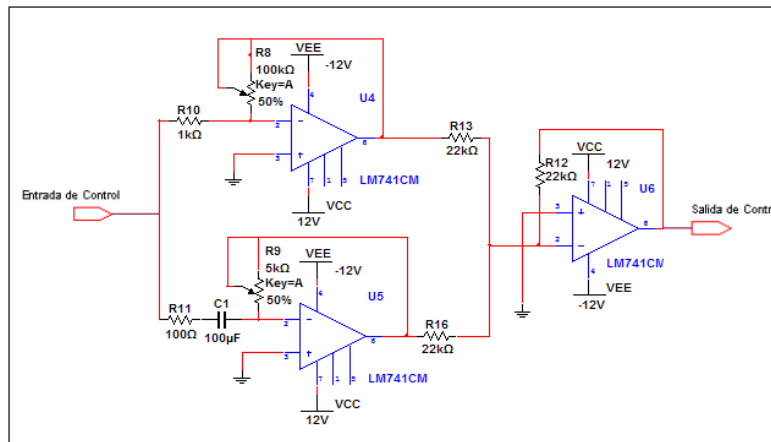
$e(t)$ : error de la posición .

$K_p$ : ganancia proporcional.

$K_d$ : ganancia derivativa.

Las ganancias de la parte derivativa y proporcional se obtuvieron mediante el análisis del lazo abierto del sistema por lo que la ganancia se deben ajustar por lo que se colocaron potenciómetros para variar la ganancia proporcional y derivativa hasta obtener la estabilidad del sistema el circuito implementado se muestra en la figura 16.

La parte de la ganancia proporcional y derivativa se suman para obtener a la salida el control del sistema.



**Figura 16.** Compensador PD.

## 5.4 PWM

La generación de pwm se hizo mediante un amplificador comparador aquí es donde se observa como realiza la corrección el control haciendo que el pwm se estabilice la implementación del circuito se observa en la figura 17.

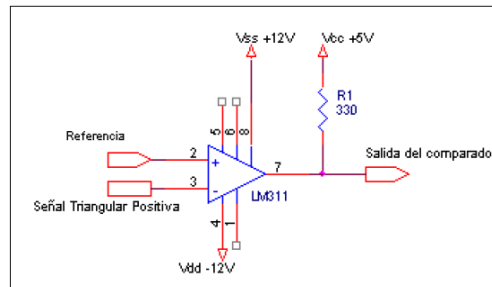


Figura 17. Amplificador comparador generador del PWM.

## 5.5 Potencia

En la etapa de potencia entre el circuito que genera el PWM y el de potencia no hay ninguna etapa de acoplamiento entre ellas por lo que el PWM entra directamente a la base del MOSFET. Lo que realiza este es que por medio del PWM hay un periodo de tiempo donde se deja activa la corriente que pasa por la bobina por que como se sabe que el campo magnético es proporcional a la corriente que hay en la bobina.

La implementación del circuito de potencia se observa en la figura 18.

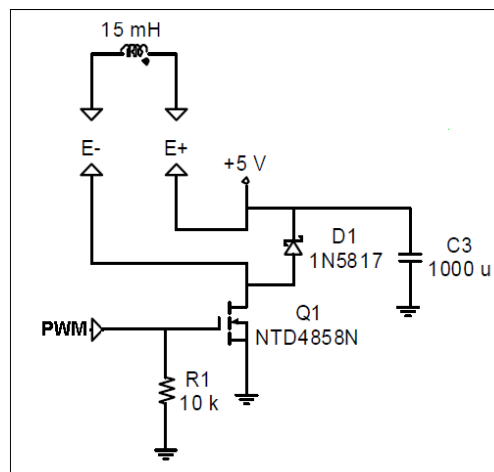


Figura 18. Circuito de etapa de potencia.

## 5.6 Circuito general del sistema.

En el circuito de la figura 19 se muestra la implementación final del control del sistema, que por medio del control y el pwm hace que la corriente que tenga que pasar por la bobina produzca un campo magnético y con ello se produce el electroimán, el cual realiza que la esfera se mantenga levitando en su punto o posición de equilibrio.

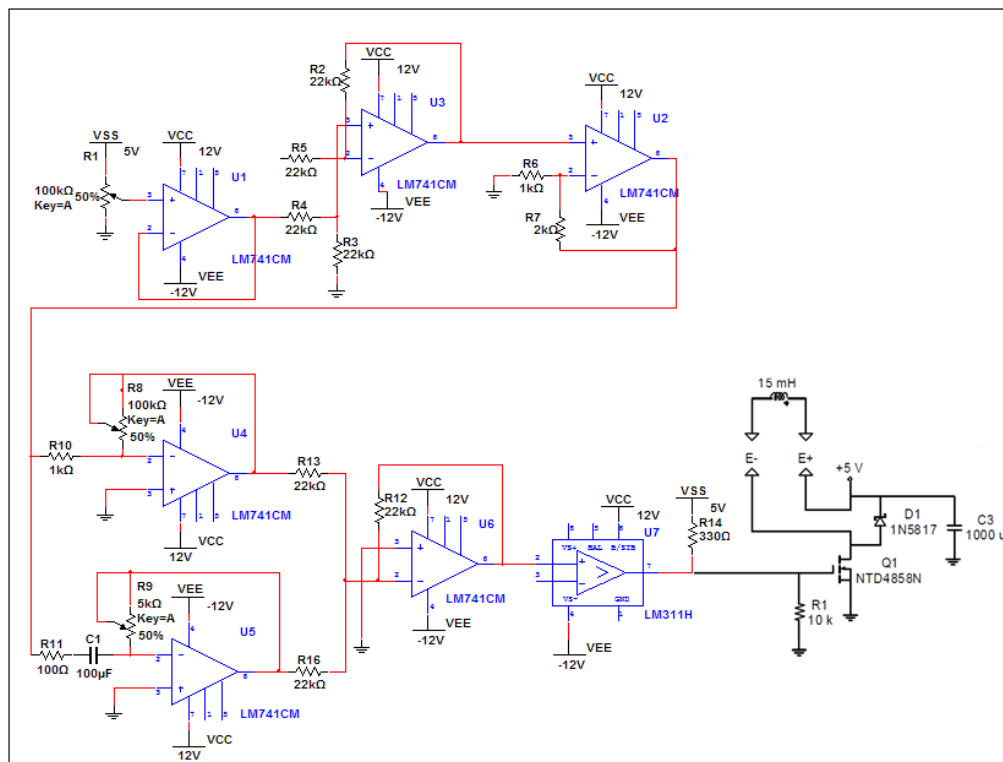


Figura 19. Circuito de general.

## 6. Resultados Experimentales

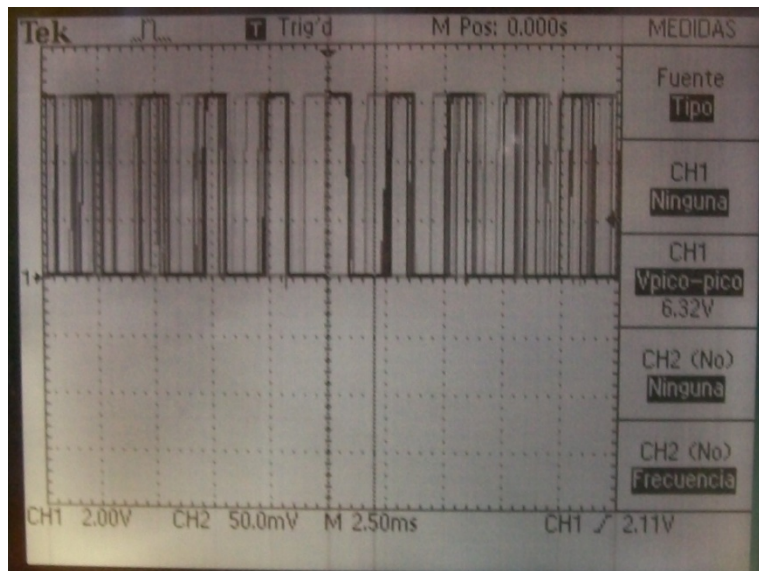


Figura 20. Tensión de salida del pwm.

## 7. Análisis de Resultados

A la salida de la etapa restadora, que es la etapa de cálculo del error, se colocó un amplificador en modo no inversor, para obtener una ganancia de 3, por lo que la tensión de la etapa diferencial, que variaba en un rango de 0 a 2.5V, se elevaba a una tensión de 7.3V experimentalmente, y esta señal era la entrada de la etapa del circuito PD del control.

En la etapa controladora PD, como se observa en la figura 16, la etapa derivativa tiene una resistencia en serie con el condensador de entrada, esto con el fin de regular la corriente de entrada del amplificador, esta resistencia recomendada es de un valor de  $100\Omega$ . Para realizar las pruebas con el circuito PD, primero se dividió en la etapa proporcional y en la etapa derivativa y así cada una de las etapas fue probada de manera que al unirlas al amplificador sumador se tuviera el control deseado. Primeramente, a la entrada de la etapa derivativa se colocó una tensión senoidal de 10VPP y se ajustó el potenciómetro de la retroalimentación a un valor adecuado para poder observar una tensión de salida cosenoidal de 10 VPP. Seguidamente se realizaron las pruebas en la etapa proporcional, para la cual conforme se variaba el valor del potenciómetro de retroalimentación, así variaba el valor de la tensión de salida, con lo que adicionalmente se variaba la ganancia del circuito. Al realizar la prueba con la planta y con la esfera, para poder lograr la estabilidad de la esfera, los valores aproximados de los potenciómetros de la etapa derivativa y de la etapa proporcional fueron respectivamente  $49.4k\Omega$  y  $469\Omega$ .

La señal del PWM, como se muestra en la figura 20, se creó mediante la comparación de la señal triangular de 12VPP con la salida del control PD, a la salida del control PD se colocó una resistencia de  $10k\Omega$  para regular la corriente y tener una tensión de 12V, que al ser comparada con la señal triangular, se obtenía un tren de pulsos de 12VPP para alimentar la etapa de potencia.

En la última etapa del circuito, como lo es la parte de potencia conectada con la bobina de la planta, el nivel al que levitaba la esfera se lograba comparando

la tensión proveniente del sensor de efecto Hall con una señal de referencia de entrada, para esto, el valor de la tensión del sensor de efecto Hall variaba de 2.5V, esto es la tensión sin objetos magnéticos, hasta 0V; el valor de referencia del circuito se ajustaba mediante un potenciómetro de 10kΩ, y a la hora de tener la esfera levitando se obtuvo un valor de resistencia en el potenciómetro de 3.322kΩ, con lo que da una tensión de 1.611 V.

$$V_{ref} = \frac{5 * 3.22}{10} = 1.611V$$



## 8. Conclusiones

- La fuerza electromagnética es proporcional a la corriente que pasa en la bobina.
- El sensor de hall es muy preciso a cambios de densidad de flujo magnético.
- El control proporcional derivativo PD proporciona estabilidad y robustez al sistema.
- El sistema soporta perturbación agregándole masa corporal al objeto levitando.

## 9. Recomendaciones

- La bobina y el sensor las partes fundamentales del sistema de levitación por ello es de mucha importancia la selección de ellos.
- El sensor está en la parte inferior de la bobina deben tener cuidado de los golpes físicos que se dan entre la esfera y el sensor, el cual se puede dañar.

## 10. Bibliografía

- [1] Ogata, Katsuhiko (2001). **Ingeniería de Control Moderna**. México: Pearson Prentice Hall.
- [2] Kuo, Benjamín C (1996). **Sistemas de Control Automático**. México: Pearson Prentice Hall
- [3] Franco Sergio (2004). **Diseño con Amplificadores Operacionales y Circuitos Integrados Analógicos**. México: Mc Graw Hill.
- [4] Escuela de Ingeniería Electrónica0. [<http://www.ie.itcr.ac.cr/einteriano/control>> ]
- [5] Escuela de Ingeniería Electrónica. [<http://www.ie.itcr.ac.cr/einteriano/control>> ]
- [6] Zeltom. **Planta**. [<http://zeltom.com/emls.aspx>> ]
- [7] Zeltom **Componetes de la planta**. [<http://zeltom.com/components.aspx>]

## 11. Anexo

Fotos del sistema de levitación magnética:

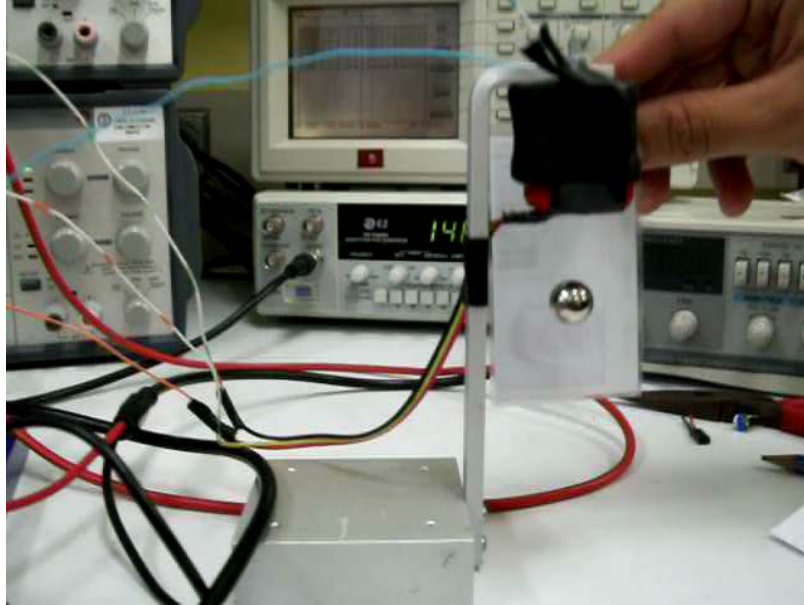


Figura 21. La planta y la esfera levitando.